

УДК 621.517

Смаль І.В.

( аспірант львівського національного університету імені Івана Франка, кафедра радіофізики )

## ДОСЛІДЖЕННЯ СУБГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ У ФЕРОРЕЗОНАНСНИХ КОЛАХ

Досліджено виникнення і існування субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{1}{3}$  у ферорезонансних електричних колах на основі єдиної математичної моделі у формі рівняння Дуффінга методом гармонічного балансу в залежності від параметрів кола і амплітуди зовнішнього сигналу.

Исследовано возникновение и существование субгармонических колебаний порядка  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{3}$  в феррорезонансных электрических цепях на основе единой математической модели в форме уравнения Дуффинга методом гармонического баланса в зависимости от параметров цепи и амплитуды внешнего сигнала.

**Ключові слова:** *субгармонічні коливання, метод гармонічного балансу.*

Дослідження процесів ділення частоти зовнішнього сигналу у нелінійних динамічних системах є цікавим явищем, яке ще не повністю досліджено і ще не встановлено загальних критеріїв котрі б дозволили для довільної системи встановити області існування таких режимів. Окремі спроби кількісно описати згадані явища зустрічаються у роботах багатьох авторів [1-7], але у більшості випадків всі вони при розгляді даної проблеми обмежуються конкретними значеннями параметрів системи і намагаються встановити умови виникнення субгармонічних коливань в залежності від параметрів (амплітуди або частоти) зовнішнього сигналу. Набагато важливішим з практичної точки зору є встановлення критеріїв виникнення і існування субгармонічних коливань для параметрів самої системи при довільних значеннях параметрів зовнішнього сигналу.

У даній роботі вивчається математична модель  $RLC$  контурів (рис.1, рис.2) з єдиним нелінійним елементом – індуктивністю, для якої задано залежність струму  $i$  від потокозчеплення  $y$ , з метою встановлення умов існування субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{1}{3}$  в залежності від значень  $R$ ,  $L$  і  $C$ .

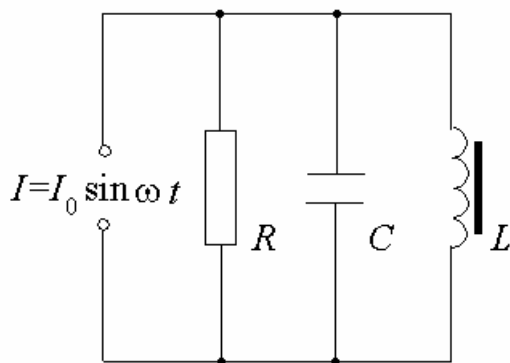


Рис.1

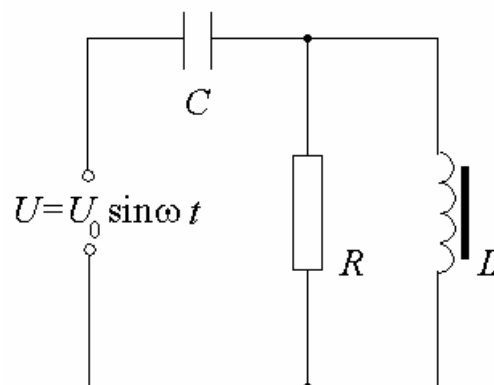


Рис.2

При подальшому розгляді втрачати, що існують за рахунок омичного опору котушки індуктивності, нехтуємо. Втрати за рахунок струмів Фуко в осерді та за рахунок гістерезису враховуються паралельним опором  $R$ . Якщо нехтувати втратами на гістерезис то опір  $R$  можна вважати лінійним. Приймаючи до уваги зроблені припущення схему  $RLC$  контуру в

режимі заданого струму (рис.1) та в режимі заданої напруги (рис.2) можна звести до єдиної математичної моделі, що описується диференціальним рівнянням виду:

$$\frac{d^2y}{dq^2} + 2d \frac{dy}{dq} + n^2y + a f(y) = a \cos(q + a) \quad (1)$$

де параметри  $\delta$ ,  $\nu$ ,  $a$  і змінна  $y$  - безрозмірні величини,  $a$  - початкова фаза зовнішнього  $T$ -періодичного сигналу ( $T = 2\pi$ ),  $f(y)$  - деяка однорідна функція. Надалі приймаємо  $f(y) = y^3$ . Такий вигляд функції  $f(y)$  найчастіше використовується на практиці при аналітичних розрахунках згаданих вище нелінійних електричних кіл.

Параметри для схеми зображеної на рис.1, для якої вебер амперну характеристику індуктивності задано у вигляді  $i = \frac{y}{L_0} + Ay^3$ , де  $A$  - деяка константа ( $A > 0$ ), а  $L_0$ -значення диференційної індуктивності на початковій, майже лінійній (в околі  $y = 0$ ) ділянці, мають наступний вигляд:

$$y = \frac{y}{y_s}, \quad 2d = \frac{1}{\omega R C}, \quad n^2 = \frac{1}{\omega^2 L_0 C}, \quad a = \frac{I_0}{C \omega^2 y_s}, \quad q = \omega t$$

Значення  $y_s$  визначається з рівняння  $f(y_s) = I_0$ , що дає змогу зменшити кількість параметрів, що описують електричне коло.

Аналізуючи значення параметрів  $\delta$ ,  $\nu$ ,  $a$  для реального електричного кола ( $\omega = 314$  рад/с) можна вказати межі, в яких доцільно здійснювати аналіз математичної моделі (1):

$$0 < d < 0.1, \quad 0.01 < a < 1 \quad (2)$$

Значення  $n$  при цьому  $< 0.03$ , тому при наступних розрахунках для простоти аналітичних виразів прийнято  $\nu=0$ . Режими, що описуються рівнянням (1) при  $n=0$  і  $n \neq 0$  ( $n < 0.03$ ) при виконанні (2) якісно не відрізняються.

Головну увагу у даній статті зосереджено на вивченні умов виникнення і існування субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{1}{3}$ . Для цього використано метод гармонічного балансу (МГБ), тобто субгармонічний розв'язок порядку  $1/p$  рівняння (1) шукається у вигляді:

$$y(q) = y_0(q) + J(q) = a_0 + \sum_{m=1}^M a_m \cos \frac{m}{p} q + b_m \sin \frac{m}{p} q + J(q) \quad (3)$$

де  $M$  – ціле число. Дотримуючись термінології Ляпунова  $y_0$  - це незбурений розв'язок, а  $J(q)$  - деяке збурення. Не зменшуючи загальності будь-який один з фазових кутів  $b_m$  можна прийняти рівним нулю. Підставляючи (3) в (1) і прирівнюючи коефіцієнти при  $\cos \frac{m}{p} q$  і  $\sin \frac{m}{p} q$  отримаємо систему з  $2M+1$  алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $a_i, b_i, a$ , розв'язуючи яку отримаємо розв'язок  $y_0(q)$  рівняння (1), і одночасно отримаємо (при лінеаризації) диференціальне рівняння відносно  $\theta(\theta)$  для дослідження стійкості отриманого розв'язку:

$$2dJ + 3ay_0^2(q)J = 0 \quad (4)$$

Слід зауважити, що при діленні частоти в  $p$  раз незалежно від системи в якій відбувається режим ділення, існує  $p$  різних модифікацій цього режиму, які зсунуті в часі один відносно другого на відрізок  $T$ , де  $T$  -період зовнішнього сигналу.

Легко переконатись, що якщо  $y(q) = y(q + pT)$  - субгармонічний розв'язок (1) порядку  $1/p$ , то  $\bar{y}(q) = -y(q + T/2)$  - також субгармонічний розв'язок (1), при умові, що він несиметричний, тобто  $y(q) \neq y\left(\frac{2}{3}q + \frac{pT}{2}\right)$ . Якщо розв'язок симетричний, то  $\bar{y}(q)$  співпадає з одним з розв'язків, які зсунуті у часі одини відносно другого на відрізок  $T$ .

Можна також показати, що при  $p$  – парному субгармонічні розв'язки рівняння (1) обов'язково несиметричні і тому існують в  $2p$  модифікаціях [2,5].

Чисельні дослідження субгармонічних коливань порядку  $1/3$  в системі (1) при виконанні умов (2) свідчать про те, що режим ділення частоти в 3 рази – симетричний, тобто  $y(q) = -y\left(\frac{2}{3}q + \frac{3T}{2}\right)$  і тому існує тільки 3 модифікації цього режиму.

Беручи до уваги вище зазначені зауваження при дослідженні системи (1) можна вважати  $a_m > 0$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ), так як при існуванні розв'язку (1) з постійною складовою завжди існує два розв'язки з постійними складовими  $a_0$  і  $-a_0$  ( $a_0 > 0$ ), а знаки перед гармонічними доданками у ряді (3) визначаються значеннями  $b_m$  при  $a_m > 0$ .

Розглянемо умови виникнення і існування субгармонічних коливань з періодом  $3T$ . Аналіз субгармонічних коливань з періодом  $3T$ , що виникають в системі (1) при значенні параметрів, що задовольняють (2), отриманих чисельним інтегруванням, з допомогою дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) вказує на те, що основну роль відіграють дві гармонічні складові тригонометричного ряду (3). Тобто використовуючи МГБ  $3T$  – періодичний розв'язок системи (1) потрібно шукати у вигляді:

$$y_0(q) = a_1 \sin \frac{q}{3} + a_3 \sin (q + b) \quad (5)$$

Амплітуди наступних гармонік складають менше 1.5% від  $a_1$  ( $a_1 > a_3$ ). Після підстановки (5) в (1) отримуємо систему з 4-ох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $a_1, a_3, b, a$  :

$$\begin{aligned}
 & 27a \left( a_1^2 - a_1 a_3 \cos b + 2a_3^2 \right) - 4 = 0 \\
 & 24d + 27a a_1 a_3 \sin b = 0 \\
 & \frac{3}{4} a a_3^3 - a_3 + \frac{3}{2} a a_1^2 a_3 \cos b - 2 d a_3 \sin b - \frac{1}{4} a a_1^3 = -a \sin a \\
 & \frac{3}{4} a a_3^3 - a_3 + \frac{3}{2} a a_1^2 a_3 \sin b + 2 d a_3 \cos b = a \cos a
 \end{aligned} \tag{6}$$

Виключаючи невідомі  $b, a$  в (6) і здійснюючи заміну змінних  $X = a a_1^2, Y = a a_3^2$  отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 & 16 - 216X + 729X^2 - 432Y + 2187XY + 2916Y^2 + 576d^2 = 0 \\
 & -\frac{11}{16}X^3 + \frac{3d}{18} + \frac{3}{8}YX^2 - \frac{3}{2}Y^2 + \frac{9}{16}Y^3 + \\
 & \quad \frac{2}{27} - \frac{35}{18}Y + \frac{3}{2}Y^2 + \frac{8}{9}d^2X + (1 + 4d^2)Y = a^3
 \end{aligned} \tag{7}$$

З першого рівняння системи (7) знаходимо  $Y = Y(X, d)$  :

$$Y = \frac{1}{216} \left( 16 - 81X \pm 3 \sqrt{96X - 576X^2 - 1024d^2} \right) \tag{8}$$

Аналізуючи значення підкореневого виразу в (8) знаходимо значення  $d_0 = \frac{1}{6\sqrt{7}}$  при якому цей вираз обертається в нуль і відповідно існує єдине значення  $Y$  для довільних

значень  $X$ . Тобто при  $d > d_0$  в системі (1) є неможливим існування субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{3}$  при довільних значеннях амплітуди зовнішнього сигналу  $a$ .

Підставляючи вираз для  $Y$  з (8) в друге рівняння системи (7) отримуємо залежність  $F_1(X, d) = a$ . Цю залежність на площині  $(a_1, a)$ , де  $d$  відіграє роль параметра, зображено на рис.3.

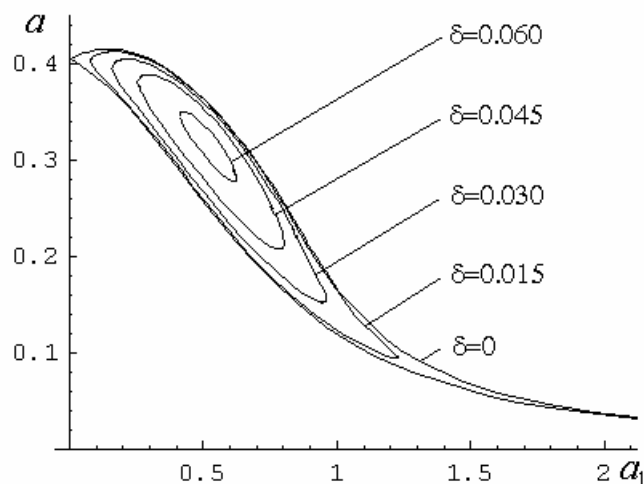


Рис.3

Кожному значенню амплітуди зовнішнього сигналу  $a$  відповідає два значення амплітуди субгармонічного коливання  $a_1 = a_{11}$  і  $a_1 = a_{12}$  ( $a_{11} \text{ J } a_{12}$ ). Знаючи ці значення знаходимо відповідні значення  $a_3$  з першого рівняння системи (7) і значення  $a$  і  $b$  з системи (6). В результаті отримуємо два розв'язки рівняння (1) у вигляді (5), які описують субгармонічні коливання порядку  $\frac{1}{3}$ . Використовуючи рівняння (4) для дослідження стійкості цих розв'язків знайдено, що при певному значенні  $a$  стійкому розв'язку відповідає значення  $a_1 = a_{12}$ , а нестійкому  $a_1 = a_{11}$ , і відповідні значення  $a_3$ ,  $a$  і  $b$ .

Розглянемо умови виникнення і існування субгармонічних коливань з періодом  $2T$ . Аналогічний аналіз субгармонічних коливань з періодом  $2T$ , що виникають в системі (1) при значення параметрів, що задовольняють (2) з допомогою ДПФ вказує на те, що основну роль

відіграють постійна складова і дві гармонічні складові тригонометричного ряду (3). Тобто використовуючи МГБ  $2T$  –періодичний розв’язок системи (1) потрібно шукати у вигляді:

$$y_0(q) = a_0 + a_1 \sin \frac{q}{2} + a_2 \sin (q + b) \quad (9)$$

Амплітуди наступних гармонік складають менше 2.5% від  $a_1$  ( $a_1 > a_2, a_3$ ). Після підстановки (9) в (1) отримуємо систему з 5-и нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $a_0, a_1, a_2, b, a$  :

$$\begin{cases} 4a_0^3 + 6a_0 a_1^2 - 3a_1^2 a_2 \sin b + 6a_0 a_2^2 = 0 \\ 12a a_0^2 + 3a a_1^2 - 12a a_0 a_2 \sin b + 6a a_2^2 - 1 = 0 \\ d + 3a a_0 a_2 \cos b = 0 \\ A \cos b - 2a_2 d \sin b = -a \sin a \\ A \sin b + 2a_2 d \cos b - \frac{3}{2} a a_0 a_1^2 = a \cos a \end{cases} \quad (10)$$

де  $A = 3a a_0^2 a_2 + \frac{3}{2} a a_1^2 a_2 + \frac{3}{4} a a_2^3 - a_2$ . Виключаючи невідомі  $a$  і  $b$  в (10) і здійснюючи заміну змінних  $X = a a_0^2$ ,  $Y = a a_1^2$ ,  $Z = a a_2^2$  отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 16X^2 + Y(1 - 3Y - 6Z) + 12X(Y + 2Z) = 0 \\ 1 + 144X^2 + 9Y^2 + 24X(3Y - 1) - 12Z + 36Z^2 + 6Y(6Z - 1) + 16d^2 = 0 \\ \frac{1}{16}(-18Y^3 - 9Y^2(8X + Z - 2) + Y(-4 - 144X^2 - 21Z + 18Z^2 + 12X(5 + 3Z) + 32d) + Z(16 + 144X^2 - 24Z + 9Z^2 + 24X(3Z - 4) + 64d^2)) = a^3 \end{cases} \quad (11)$$



Знаходячи з перших двох рівнянь системи (11) залежності  $Y = Y(X, d)$ ,  $Z = Z(X, d)$  і підставляючи їх у третє рівняння системи (11) отримаємо залежність  $F_2(X, d) = a$ . Цю залежність на площині  $(a_0, a)$  зображено на рис.4

Дослідження стійкості отриманих МГБ субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{2}$  з використанням рівняння (4) свідчить про те, що для певного значення  $a$  відповідні значення  $a_0, a_1, a_2, b$  отримані з системи (10) будуть описувати стійкі субгармонічні коливання лише при умові що значення  $a_0$  для цього  $a$  знаходиться між кривими  $A'B'$  і  $A''B''$ .

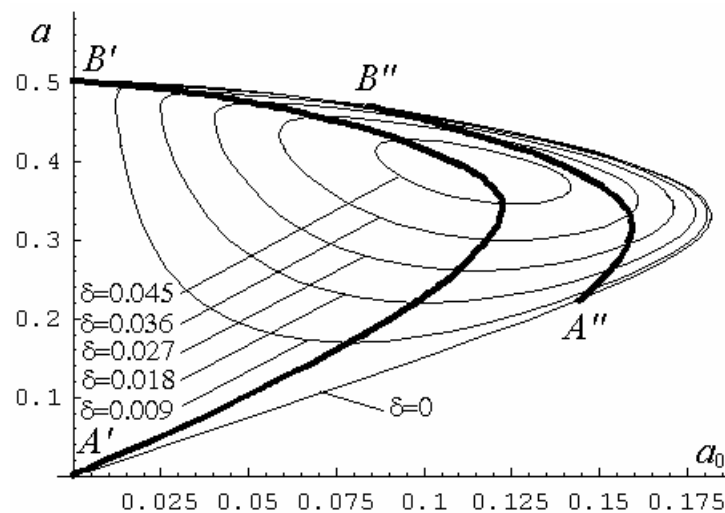


Рис.4

На рис.5 зображено області існування субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{1}{3}$  на площині параметрів  $(d, a)$ , які отримано з використанням функцій  $F_1(X, d)$  і  $F_2(X, d)$ . Слід відмітити, що область існування  $3T$ -періодичних коливань значно більша по площі ніж у випадку  $2T$ -періодичних коливань і існує тільки один інтервал значень  $a$  при фіксованих значеннях  $d$ , при яких є можливим існування субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{3}$  тоді, як для випадку субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{2}$  область існування відповідного режиму має значно складніший характер: при фіксованих значеннях  $d$  у інтервалі  $0 < d < 0.042$

існує два інтервали значень  $a$  при яких можливе існування  $2T$ -періодичних коливань. Значення  $d_0=0.0486$  для випадку субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{2}$  є меншим від відповідного значення  $\delta_0$  для випадку коливань порядку  $\frac{1}{3}$ .

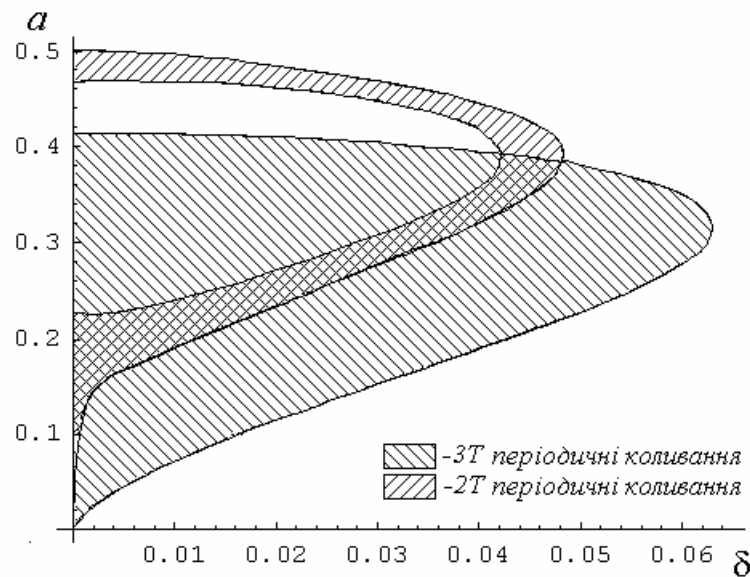


Рис.5 Области існування субгармонічних коливань порядку  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{1}{3}$ .

Аналогічні результати отримано МГБ і для  $n \neq 0$ . У цьому випадку аналітичні вирази мають набагато складніший вигляд і не містять ніяких якісних відмінностей від випадку  $n = 0$ . Відмінність між відповідними  $d_0$  для  $n = 0$  і  $n = 0.03$  складає 1%.

Отримані результати по дослідженню субгармонічних коливань методом гармонічного балансу дозволили виявити області існування цих режимів у просторі параметрів  $(\delta, a, \nu)$ , причому числовий розв'язок, який при певних застереженнях відносно методу числового інтегрування і вибору кроку інтегрування можна вважати точним, повністю підтверджує законність використання методу гармонічного балансу. Відносні похибки у кількісних характеристиках границь областей існування складають не більше 3%.

Проте необхідно зауважити, що при використанні МГБ приймалась певна форма закону зміни  $y(t)$  у часі, в якій нехтувалось наявністю вищих гармонік основної частоти режиму, що розглядався. В знайдених областях в просторі  $(d, a, n)$  допустимість відкидання вищих гармонік обґрунтована числовим розрахунком, що дійсно вказує на їх мале значення. Проте немає підстав вважати, що виконані розрахунки дозволили визначити повну картину областей існування шуканих режимів у просторі  $(d, a, n)$ . Можливо, що зміною закону  $y(t)$  можуть бути знайдені інші області їх існування, що відповідають більшим значенням параметрів  $a$  і  $d$ . Зрозуміло, що пошук цих режимів і областей їх існування методом гармонічного балансу вимагає значно більших зусиль.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Бессонов Л.А., “Нелинейные электрические цепи”, изд. Высш. Шк., 1964, 312 с.
2. Синицкий Л.А., Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, Львов, 1971.
3. Стокер Дж., “Нелинейные колебания в механических и электрических системах”, М.: изд. Ин. Лит, 1952, 264 с.
4. Хаяси Т., “Вынужденные колебания в нелинейных системах”, М.: изд.Ин. Лит. 1957, 204 с.
5. Ch. Hayashi, “Proceedings of the fourth conference on nonlinear oscillations”, Prague, 1968, 40p.
6. A.Hassan “On the Local Stability Analysis of the Approximate Harmonic Balance Solutions”, *Nonlinear Dynamics*, 1996, no. 10, pp. 105-133.
7. K.L.Janicki, W. Szemplinska-Stupnicka “Subharmonic resonances and criteria for escape and chaos in a driven oscillator”, *Journal of Sound and Vibration*, Feb 1995, Vol. 180, No. 2, pp. 253-269.