СИНТЕЗ АВТОКОЛИВАЛЬНИХ СИСТЕМ, ЩО ВІДТВОРЮЮТЬ ОДИН З РОЗВ’ЯЗКІВ ГАМІЛЬТОНОВОЇ СИСТЕМИ

Л. Синицький, І. Смаль

Львівський державний університет імені Івана Франка, кафедра радіофізики.
Україна, UA-290005 , Львів, вул. Драгоманова 19.

Для гамільтонової системи з одним ступенем свободи, яка володіє континуумом періодичних рухів, побудована процедура перетворення її в автоколивальну систему. Для синтезованої автоколивальної системи зберігається закон зміни координати $q(t)$ та імпульсу $p(t)$ гамільтонової системи при заданому значенні гамільтоніана.

Шляхом відповідного вибору потенціалу встановлена можливість відтворення коливань наперед заданої форми. В якості прикладу синтезований генератор, форма коливань якого співпадає якісно з періодичними коливаннями, що є притаманними для кардіограм.

Запропонований метод поширений на системи з довільною кількістю ступенів свободи для синтезу генераторів квазіперіодичних коливань.

Ключові слова: рівняння Гамільтона, автоколивальна система, синтез коливань.

PACS number(s): 02.60.Cb

Розглянемо гамільтонову систему з одним ступенем свободи:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{1}$$

Нехай $H(q,p)$ така, що на фазовій площині (q,p) криві

$$H(q,p) = c, \quad c = const,$$

є простими замкненими кривими. Їм відповідають періодичні рухи в системі (1). Задача полягає в тому, щоб модернізувати рівняння (1) так, щоб система (1) перетворювалася в автоколивальну систему, для якої граничний цикл визначався б рівнянням

$$H(q,p) = H_0,$$

де H_0 – константа, а залежності $q(t)$ і $p(t)$ тотожні розв'язкам системи (1) при $H = H_0$.

Цей підхід для окремого випадку системи (1)

$$\frac{dq}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -q,$$

для якої гамільтоніан

$$H = \frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right)$$

відомий і, мабуть, уперше викладений у монографії О.О.Андронова, О.А.Вітта [1].

Модернізована система з періодичним синусоїдним розв'язком має вигляд

$$\frac{dq}{dt} = p + \varepsilon\left(R^2 - q^2 - p^2\right)q,$$
$$\frac{dp}{dt} = -q + \varepsilon\left(R^2 - q^2 - p^2\right)p,$$

де $\varepsilon > 0$, причому

$$q = R\sin(t + \alpha),\ p = R\cos(t + \alpha). \tag{2}$$

Усі траєкторії на площині (q, p) прямують до граничного циклу $q^2 + p^2 = R^2$, тобто періодичний режим (2) є стійким.

Для того, щоб узагальнити цей підхід на будь-який гамільтоніан розглянемо модернізовану систему (1):

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} - \varepsilon\left(H - H_0\right)\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} - \varepsilon\left(H - H_0\right)\frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned} \tag{3}$$

Приймаємо, що $\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0$ в точці $q = q^*$, $p = p^*$ і ця точка є глобальним мінімумом $H(q, p)$; зрозуміло, що на фазовій площині маємо в точці (q^*, p^*) особливу точку типу центра. Не зменшуючи загальності, також приймаємо $H(q^*, p^*) = 0$, тоді $H(q, p)$ додатно визначена функція на всій площині (*q,p*).

Помноживши перше з цих рівнянь на $\frac{\partial H}{\partial q}$, а друге – на $\frac{\partial H}{\partial p}$ і додавши, отримаємо

$$\frac{dH}{dt} + \varepsilon\left[\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^2\right]\left(H - H_0\right) = 0. \qquad (4)$$

Уздовж траєкторії руху, якщо вона не є станом рівноваги,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^2 > 0\,.$$

Можна довести, що стани рівноваги яким відповідає значення гамільтоніана $H^* < H_0$ є нестійкими. Тому при $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to \infty} H(t) = H_0$$

для всіх початкових умов, що не є станами рівноваги і сепаратрисами, що прямують до сідла. А це означає, що стаціонарні розв’язки (3) і (1) тотожні. Таким чином доведено, що автоколивальний режим у системі (3) має часові залежності $q(t),\ p(t)$ такі самі, як у консервативній системі (1). Цей режим є стійким. На рис 1,2 подано фазові портрети системи (1) і системи (3) при використанні гамільтоніана в такому вигляді:

$$H(q,p) = p^2 + q^4 - q^2 + 0.25, \qquad H_0 > 0.25$$

Розглянута процедура дає змогу синтезувати генератор з довільною формою граничного циклу $H(q,p) = H_0$, а також змінні $q(t)$, $p(t)$ із багатьма екстремальними значеннями за згаданих вище обмежень.

Використаємо запропонований підхід для синтезу автоколивальної системи з довільною формою сигналу. Побудова генераторів, які відтворюють коливання з наперед заданою формою, розглядались на протязі багатьох років. Зрозуміло, що було бажання побудувати генератор найпростішим шляхом, тобто з мінімальною кількістю ступенів свободи і не дуже складною нелінійністю.

Задача створення подібного генератора з одним ступенем свободи розглядалась в [2], проте досягнути поставленої мети не вдалося. Виникнула необхідність використовувати системи з 1,5 ступенями свободи (тобто систему диференційних рівнянь третього порядку) при дуже складному виразі для нелінійності.

Спроба довести можливість використання системи з одним ступенем свободи була знову зроблена в [3]. Не зважаючи на те, що вдалося для досить широкого класу коливань побудувати генератори з одним ступенем свободи, загальна проблема теж не була розв’язана.

Зауважимо, що намагання синтезувати генератор на підставі систем з одним ступенем свободи не обумовлено бажанням досягнути рекордного результату. Якщо ця задача розв’язана, то тим самим забезпечено неможливість існування небажаних явищ таких, як виникнення квазіперіодичних і хаотичних коливань, які є неможливими у системах з одним ступенем вільності.

Розглянемо процедуру синтезу в загальному випадку. Нехай потрібно синтезувати періодичні коливання з періодом T, що описуються на періоді довільною функцією $f(t)$. Не зменшуючи загальності приймемо, що $f(0) = f_m$, де $f_m = \min\limits_{0<t\le T} f(t)$. Задача синтезу полягає в такому виборі $H(q,p)$, щоб розв'язок $p(t)$ системи (4) співпадав з функцією $f(t)$.

Надалі будемо розглядати випадок, коли $H(q,p)$- сепарабельна функція, тобто

$$H(q,p) = F(p) + V(q). \tag{5}$$

Функцію $F(p)$ приймаємо у вигляді, який "нагадує" вигляд кінетичної енергії, тобто $F(p)$ має єдиний екстремум (мінімум) в точці p=p^*, і $F(p^*) = 0$, $\lim\limits_{|p|\to+\infty} F(p) = +\infty$. В окремих випадках не виключено, що $F(p) = \frac{1}{2}p^2$.

На функцію $V(q)$ накладаємо такі умови – ця функція має скінченну кількість екстремумів і $\lim\limits_{|q|\to+\infty} V(q) = +\infty$.

За накладених умов всі стани рівноваги системи (1) будуть лежати на площині (q,p) на прямій p=p^*. Ці умови також забезпечують те, що на фазовій площині (q,p) криві

$$H(q,p) = c, \quad c_m < c < +\infty$$

є простими замкненими кривими, що охоплюють точку (q^*, p^*). Їм відповідають періодичні рухи в системі (1). Константа c_m=$\max\limits_{\forall i} H(q_i, p_i)$-де (q_i, p_i) є розв'язками системи рівнянь: $\frac{\partial H}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = 0;$

Назвемо "прямим ходом" проміжок часу протягом якого $\partial H / \partial p > 0$, тобто q змінюється від q_{MIN} до q_{MAX}, і "зворотнім ходом" - проміжок часу протягом якого $\partial H / \partial p < 0$. Введемо в розгляд допоміжну невід'ємну функцію $f_+(t) = f(t) - f_m$. Функція $F(p) = \frac{1}{2}p^2$.

Поставимо задачу знайти такий вигляд $V(q)$, щоб розв'язок $p(t)$ співпадав з функцією $f_+(t)$ під час "прямого ходу", тобто коли $p > 0$. Тоді цей розв'язок $p(t) = f_+(t)$ повинен задовольняти систему (1), яка описує граничний цикл

$$\dot{q} = f_+(t),$$
$$\dot{f}_+(t) = -\frac{dV}{dq}. \qquad (6)$$

З першого рівняння системи (6) знайдемо $q(t)$:

$$q(t) = \int_0^t f_+(z)dz = \varphi(t)$$

Так як функція $f_+(t)$ невідє'мна, то функція $q = \varphi(t)$ є монотонно зростаюча. В такому випадку існує однозначна обернена функція $t = \varphi^{-1}(q)$.

З другого рівняння системи (6) знайдемо вигляд функції $V(q)$:

$$V(q) = -\int_0^q \frac{df_+}{dt}dq = -\int_0^q f_+ df_+ = -\frac{\left[f_+(\varphi^{-1}(q))\right]^2}{2}$$

Гамільтоніан $H(q,p)$ при умові $H(q,p) > 0$ запишемо в такому вигляді

$$H(q,p) = F(p) + \frac{1}{2}\Big((f_M - f_m)^2 - f_+^2(\varphi^{-1}(q))\Big)$$

де $f_M = \max\limits_{0<t\le T} f(t)$, а $c_m < H_0 < \frac{1}{2}(f_M - f_m)^2$. Для того, щоб розв'язок $p(t)$ співпадав з функцією $f(t)$, $H(q,p)$ потрібно записати в іншому вигляді:

$$H(q,p) = F(p - f_m) + \frac{1}{2}\Big((f_M - f_m)^2 - (f(\varphi^{-1}(q)) - f_m)^2\Big) \qquad (7)$$

Отже використовуючи (7) можна отримати такий режим коливань, коли фазова змінна $p(t)$ під час "прямого ходу" змінюється по заданому закону $p = f(t)$. Але після "прямого ходу" відбувається "зворотній хід" і в цьому випадку $p(t)$ буде змінюватись по закону $p = 2f_m - f(T - t)$, що є небажаним. Тому потрібно певним чином зменшити тривалість "зворотнього ходу", а значення $p(t)$ при цьому наблизити до $p = f_m$. Це можна зробити за рахунок вибору функції $F(p)$ у виразі (5)

Нехай

$$F(p)=\begin{cases}\dfrac{p^2}{2} & p\ge 0\\ \dfrac{\alpha p^2}{2} & p<0\end{cases} \tag{8}$$

де $\alpha >> 1$. Покажемо, як при такому виборі $F(p)$ зміниться значення $p(t)$ і час "зворотнього ходу". Для цього використаємо вираз (7) при $p < f_m$ з врахуванням (8), тоді

$$p=-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{2H_0+(f(\varphi^{-1}(q))-f_m)^2-(f_M-f_m)^2}+f_m,$$

тобто при зростанні значення α значення $p \to f_m$.

Для визначення часу "зворотнього ходу" використаємо перше рівняння системи (1), вираз (7) і (8), тоді

$$T_{з.х.}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^T\frac{dq}{\sqrt{2H_0+(f(\varphi^{-1}(q))-f_m)^2-(f_M-f_m)^2}}=\frac{T}{\sqrt{\alpha}},$$

тобто при зростанні значення α значення $T_{з.х.} \to 0$.

В результаті при використанні Гамільтоніана у вигляді (7) з функцією (8) в системі (3) ми отримаємо розв'язок $p(t)$ у вигляді коливань, що по формі співпадають з виглядом функції $f(t)$, але отримаємо також і збільшення періоду коливань на величину $T/\sqrt{\alpha}$. Для того, щоб отримати функцію $p(t)$ з періодом T потрібно $f_+(t)$ вибирати таким чином

$$f_+(t)=f(\beta t)-f_m, \qquad \text{де} \quad \beta=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Запропонований метод синтезу генератора дозволяє отримати генерацію коливань довільної форми . Одна з задач при використанні цього методу – це відшукання аналітичного вигляду функції $t=\varphi^{-1}(q)$ для того, щоб знайти вигляд функції $V(q)$.

Значно спростити процедуру синтезу із збереженням всіх вище згаданих якісних і кількісних результатів, але з усуненням вирішення задачі знаходження оберненої функції, можна використавши в (5) замість (8) функцію $F(p)$ в такому вигляді

$$F(p)=\begin{cases}p-f_m & p\ge f_m\\ -\sqrt{\alpha}\left(p-f_m\right) & p<f_m\end{cases} \tag{9}$$

В такому випадку, згідно з системою (1) $q(t)$ змінюється лінійно, тобто під час “прямого ходу”: $q = t + const$, а під час “зворотнього ходу”: $q = -\sqrt{\alpha}t + const$, а це означає, що форма коливань $p(t)$ буде співпадати з формою граничного циклу $p(q)$, коли $p > f_m$ і $p(-q)$, коли $p < f_m$.. Синтез форми граничного циклу, яка описувалася б функцією $f(t)$ не викликає труднощів. Для цього потрібно записати $V(q)$ у такому вигляді

$$V(q) = f_M - f(q), \tag{10}$$

де $q \in [0;T]$, при цьому $c_m < H_0 < (f_M - f_m)$. Для того, щоб не було збільшення періоду коливань на величину $T/\sqrt{\alpha}$, тобто при процедурі синтезу задавати $V(q)$ таким чином

$$V(q) = f_M - f(\beta q), \qquad \text{де} \qquad q \in \left[0; \frac{T}{\beta}\right]$$

Для того, щоб функція $V(q)$ була визначена на всій фазовій площині і для забезпечення стійкості вцілому побудованого періодичного режиму доозначимо $V(q)$:

$$V(q) = \begin{cases} -f'(\beta q_1)(q - q_1) + H_0, & q > q_1 \\ f_M - f(\beta q), & q_2 \le q \le q_1 \\ -f'(\beta q_2)(q - q_2) + H_0, & q < q_2 \end{cases}$$

де q_1 і q_2 розв’язки рівняння $f_M - f(\beta q) = H_0$.

Як приклад розглянемо синтез періодичного сигналу, що якісно описує кардіографічний сигнал. Цей сигнал містить декілька екстремумів і має складний спектр в частотній області. Для його опису використаємо такий вираз:

$$f(t)=-0.6\exp(-500t^2)+0.5\exp(-250(t-0.3)^2)+1.5\exp(-600(t-0.9)^2)$$
$$-0.6\exp(-500(t-1)^2)-0.2\exp(-600(t-0.85)^2)+0.1\exp(-600(t-0.8)^2);$$

де $t \in [0;1]$, тобто період сигналу $T = 1$. Значення інших величин: H_0 =2.09, f_m =-0.6, f_M =1.5, $\alpha = 6400$. Вигляд функцій $V(q)$ і $p(t)$ подано на рис.3 і рис.4 відповідно.

Запропонований підхід можна поширити на багатовимірний випадок. Якщо q і p є n-вимірними векторами, то

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial q_n}\right)^T; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^T.$$

де T - знак транспонування.

Рівняння у формі (3) зберігають зміст у n-вимірному випадку. Розглянемо скалярні добутки:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \varepsilon\left(H - H_0\right)\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right),$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) - \varepsilon\left(H - H_0\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right).$$

Сума цих двох рівнянь

$$\frac{dH}{dt} + \varepsilon\left[\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)\right]\left(H - H_0\right) = 0. \qquad (11)$$

Так само, як і для рівняння (5), з (11) отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = H_0.$$

У n-вимірному випадку запропонована процедура дозволяє з континууму квазіперіодичних розв'язків отримати сімейство таких розв'язків, що мають постійне значення гамільтоніана. Для системи з двома ступенями вільності можна побудувати автоколивальну систему, що відтворює неперервну або імпульсну генерацію.

[1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний.* (Наука, Москва, 1981).

[2] Chua L.O., Green D.N., IEEE Trans. Circuits Syst., **CAS-21,** 286 (1974)

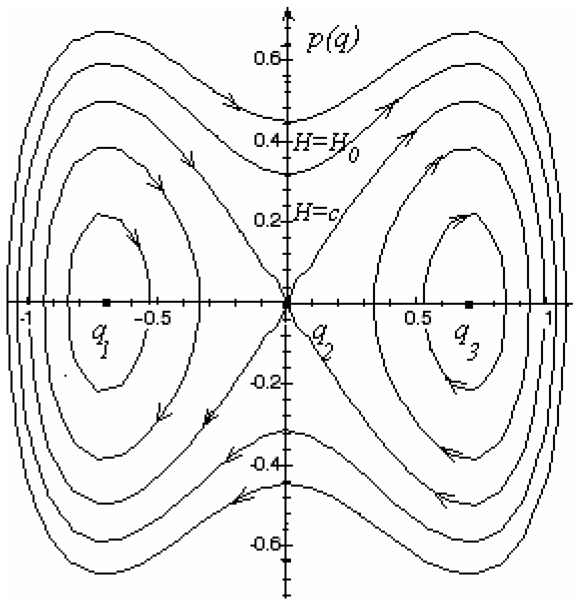
[3] Синицкий Л.А., Смаль И.В. Электронное моделирование., Том 21, №1, 19 (1999)

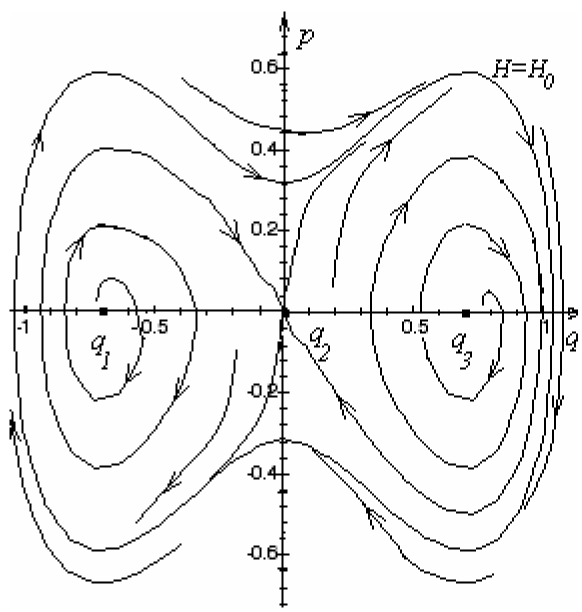
Рис.1 Фазовий портрет консервативної системи.

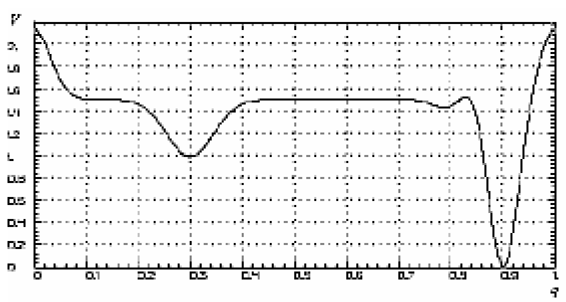
Рис.2 Фазовий портрет автоколивної системи.

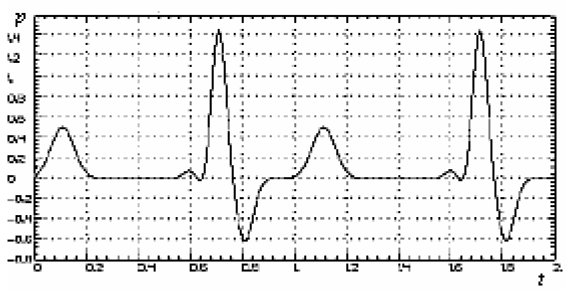
Рис.3 Функція $V(q)$.

Рис.4 Функція $p(t)$.


p(q)
H=H0
H=c
q1
q2
q3
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-1
-0.5
0.5
1


p
H=H0
q
q1
q2
q3
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-1
-0.5
0.5
1


p
q


p
t

Synthesis of autooscillators which reproduce one of the solutions of Hamiltonian system

L.A. Sinitsky, I.V. Smal

Department of Radiophysics, Lviv State University, 19 Dragomanov str., Lviv, UA-290005, Ukraine

Nonlinear periodic system is synthesised which reproduces one of the solution of Hamiltonian system. Arbitrarily prescribed periodic waveform can be synthesised due to appropriate chosen potential of Hamiltonian equations.

Proposed method of the synthesis can be extended on Hamiltonian equations with n-degrees of freedom. In this case synthesis of quasiperiodic waveforms which have n-basic frequencies is possible.

As an example autooscillator for generation of the waveform similar to the cardiogram was synthesized.